

GUÍA de Procesos infinitos:

Tema: Cálculo de Áreas aplicando Integrales.

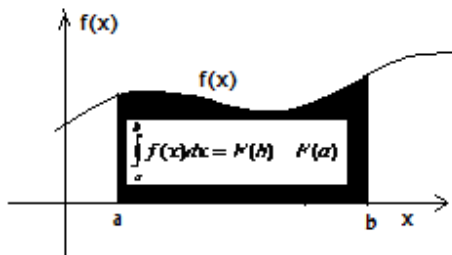
Montoya.-

Conceptos previos

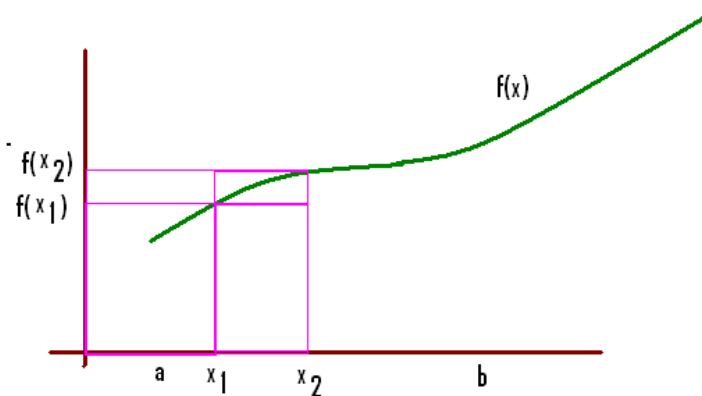
El teorema fundamental del calculo señala: si una función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) . \text{ donde } F \text{ es cualquier función tal que } F'(x)=f(x), \text{ para toda } x \text{ en } [a, b].$$

Por el **teorema fundamental del cálculo** sabemos que si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces existe la integral definida $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. El resultado de esta integral es igual al área bajo la curva $f(x)$ representada en el plano.



En efecto. Análisis geométrico



$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Si consideramos la función continua en el intervalo $[a, b]$, para dos valores distintos de la preimágenes se tienen dos valores diferentes de la imágenes (que eventualmente pueden ser iguales)

Esto define un rectángulo de base Δx cuando esta diferencia tienda a cero, entonces: $f(x_1) = f(x_2)$ en este caso la superficie de cada uno de los rectángulos cuyas áreas se expresan por $f(x) \Delta x = f(x)dx$

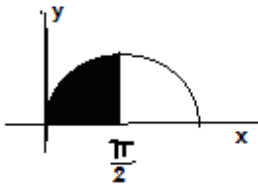
Si sumamos todos los rectángulos así formados desde a hasta b tendremos la superficie comprendida por la curva de función $f(x)$, el eje x y las líneas verticales $x=a$ y $x=b$

Problemas de aplicación:

- 1.- calcula el área limitada por la grafica de $f(x)=-x^2+2x+3$, el eje de las abscisas y las rectas verticales $x=0$ y $x=2$.
resp. $22/3. u^2$
- 2.- calcular el área limitada por $f(x)=4$, el eje de las abscisas, y las líneas verticales $x=5$ y $x=2$. Grafique.
Resp. $12. u^2$
- 3.- obtener el área de la región comprendida entre $y=x+3$, el eje de las x , y las líneas verticales $x=0$, $x=4$. Grafique.
Resp. $20. u^2$
- 4.- calcule el área de la región comprendida por la grafica de $x=-y^2+y+12$, con el eje de las x , $a=0$, $b=4$; el intervalo $[a, b]$ esta en el eje de las ordenadas.
Resp. $104/3 u^2$
- 5.- calcular el área de la región comprendida por la curva de $f(y)=y^3$, entre $y=0$, $y=\frac{3}{2}$. Grafique.
Resp. $81/64 u^2$
- 6.- calcular el área de la región comprendida por la grafica de $f(x)=x-4$, entre $x=-3$, $x=-1$.

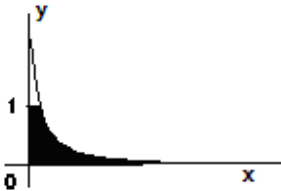
Resp. $12 u^2$

7.- calcule el área de la región que se indica en la grafica. Si $f(x) = \text{sen}x$



resp. $1 u^2$

8.- calcula el área de la región que se indica si: $f(y) = (y-2)^2$



Resp. $7/3 u^2$

Áreas entre dos curvas en un intervalo $[a, b]$.

En general se procede en forma semejante a como se hace al calcular el área bajo la curva en un intervalo.

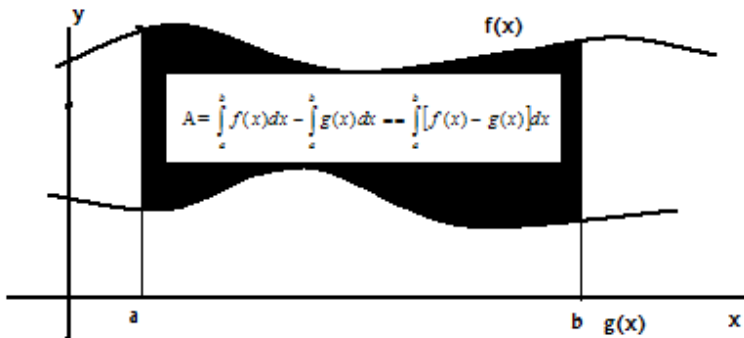
Si: $f(x)$ y $g(x)$, son dos funciones definidas para x en un intervalo $[a, b]$ y aceptando que:

$f(x) > g(x)$ y que los extremos del intervalo sean $a \leq x \leq b$.

el área de la región entre las rectas $x = a$, $x = b$ y las dos curvas esta dada por:

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Grafica:



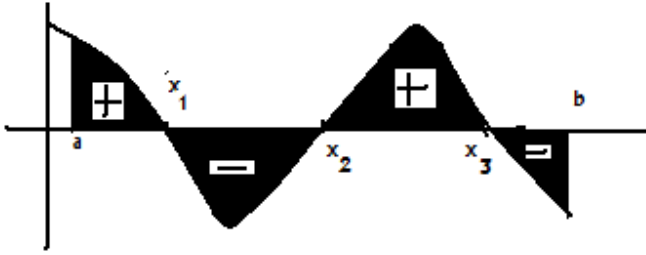
Se presentan los casos siguientes: Si **una de las curvas esta por encima del eje x y la otra esta por debajo de dicho eje de las x.**

$\int_a^b f(x) dx$, es el área bajo $f(x)$ y por encima del eje x

$-\int_a^b g(x) dx$, es el área entre el eje x y $g(x)$

En el calculo del área se debe tener en cuenta los siguientes pasos.

- 1.-resolver la ecuación $f(x) = 0$, para averiguar los puntos de la curva con el eje x .
- 2.-seleccionar las raíces que estén entre a y b y ordenándolas de menor a mayor.



SE SUMAN PARA OBTENER EL AREA TOTAL DE LAS CURVAS.

Ejercicios.

1.-Obtener el área de la región limitada por las graficas de $y_1=x^2+2$, $y_2=-x+1$, con las líneas verticales $x=1$ y $x=2$.

$$\text{Resp. } \frac{29}{6} u^2$$

2.-Calcular el área del recinto plano delimitado por la curva $y=x^2-1$, el eje ox , $x=2$

$$\text{Resp. } 4 u^2$$

3.-calcula el área limitada por las grafica $y=\cos x$, el eje OX , $x=0$ y $x=2\pi$, los valores $x=\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$

$$\text{Resp. } 4 u^2$$

4.-deducir la formula para el área de un círculo de radio R

5.-calcular el área comprendida por las curvas $y=x^3$ e $y=x$

$$\text{Resp. } \frac{1}{2} u^2$$

6.-calcular el área limitada por las parábolas: $y=x^2$ e $y^2=x$

$$\text{Resp. } \frac{1}{3} u^2$$

7.-calcule el área limitada por las rectas $y=2x$, $y=0$, $x=2$, $x=4$.Compruebe el resultado aplicando alguna formula de geometría elemental

$$\text{Resp. } 12 u^2$$

8.-calcula el área del recinto limitado por las rectas $y+x=10$, $y=0$, $x=2$, $x=8$. Comprueba el resultado mediante la formula geométrica correspondientes.

$$\text{Resp. } 30 u^2$$

9.- Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y=x^2$, y las rectas $y=0$, $x=2$, $x=6$.

$$\text{Resp. } 208/3 u^2$$

10.-Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y=x^3$ y las rectas $y=0$, $x=2$, $x=6$.

$$\text{Resp. } 1280/4 u^2$$

11.- calcular el área del recinto determinado por la parábola $y=x^2$ y la recta $y=x$

$$\text{Resp. } 1/6 u^2$$

12.-calcular el área del recinto determinado por la parábola $y=x^2$ y la recta $y=x+2$

$$\text{Resp. } 9/2 u^2$$

13.-calcular el área del recinto determinado por la parábola $y=4-x^2$ y la recta $y=x+2$

$$\text{Resp. } 9/2 u^2$$

14.-hallar el área limitada por las curvas de ecuación $y=\sqrt{x}$ y la recta $y=x$
Resp. $8/3 u^2$

15.-calcula el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y=2(1-x^2)$ y la recta de ecuación $y=-1$
Resp. $\frac{4\sqrt{3}}{2} u^2$

16.-hallar el área comprendida entre las parábolas: $y=6x-x^2$ e $y=x^2-2x$.
Resp. $64/3 u^2$

17.-hallar el área comprendida entre las parábolas : $y^2-4x=0$ y $x^2-4y=0$
Resp. $16/3 u^2$

18.-hallar el área del triangulo formado por los ejes de coordenadas y la tangente en un punto cualquiera a la hipérbola de ecuación $xy=1$.
Resp. $2 u^2$

19.- Calcula el área de la región limitada por el eje de abscisas y la grafica de $y = xe^x$, entre las rectas $x=0$ y $x=1$